1/5 A+

ejercicio 1

1	2	3	4	N
A+	A	A	A	10

¡Felicitaciones!

(a) ✓
(b) ✓
(c) ✓
(d) ✓

(a) Falso

Si $\Gamma_1 = \{\alpha\}$ y $\Gamma_2 = \{\beta\}$, $\alpha \neq \beta$, entonces $\Gamma_1 \notin Con(\underbrace{\phi}_{\{\alpha\}\cap\{\beta\}})$ si α no es tautología. ✓

(b) verdadero ($\Gamma_1 \neq \phi$)

qvq: $\forall v$ $v \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sii $v \models \Gamma_1 \cup \{\alpha \to \beta \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}$

$\Rightarrow$) si $v \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, en particular $v \models \Gamma_1$. ($\Rightarrow v \models \alpha$ $\forall \alpha \in \Gamma_1$)
Además $v \models \Gamma_2$, y por lo tanto,
~~$v \models \beta$ $\forall \beta \in \Gamma_2$. Por semántica~~
MP → de la implicación, $v \models \cancel{\beta}\, \alpha \to \beta$ con $\beta \in \Gamma_2$ y $\alpha \in$ Form, en particular $\alpha \in \Gamma_1$. Por lo tanto $v \models \Gamma_1$ y $v \models \{\alpha \to \beta \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}$, por lo tanto $v \models \Gamma_1 \cup \{\alpha \to \beta \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}$. ✓

$\Leftarrow$) Si $v \models \Gamma_1 \cup \{\alpha \to \beta \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}$ entonces $v \models \Gamma_1$ y $v \models \alpha \to \beta$, $\forall \alpha \in \Gamma_1$, $\beta \in \Gamma_2$. Como $v \models \Gamma_1$, $v \models \alpha$ $\forall \alpha \in \Gamma_1$
$\Rightarrow$ Por MP, como $v \models \alpha \to \beta$ y $v \models \alpha$ $\forall \alpha \in \Gamma_1$ $\forall \beta \in \Gamma_2$ tenemos $v \models \beta$ $\forall \beta \in \Gamma_2$, entonces $v \models \Gamma_2$.
$v \models \Gamma_1$ y $v \models \Gamma_2 \Rightarrow v \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ✓ A

(sigue atrás)

(c) Falso. $\forall\ p, q \in Prop,\ p \neq q$

$Con(\{p\}) \overset{\text{los que contuve}}{\subseteq} Con(\{p \wedge q\})$ | $\Gamma_1 = \{p\}$, $\Gamma_2 = \{q\}$

pero $\{p\} \not\subseteq \{p \wedge q\}$.

(Si v val tq $v \models p \wedge q$, $v \models p$)

(d) Falso

$Con(\{p \wedge q\}) \not\subseteq Con(\{p\})$ | $\Gamma_1 = \{p\}$, $\Gamma_2 = \{q\}$, $p, q \in Prop$, $p \neq q$,

Dado que $q \in Con(\{p \wedge q\})$ por (a)

pero $q \notin Con(\{p\})$

($\underbrace{\exists}_{\text{siempre}}$ v tq $v \models p$ pero $v \not\models q$)

continuación (4) b

(★) Por lo tanto $\forall \varphi$

- Si $\varphi \in Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \Rightarrow$
  $\forall v$ tq $v \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $v \models \varphi \Rightarrow$
  $\forall v$ tq $v \models \underbrace{\Gamma_1 \cup \{\alpha \to \beta \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}}_{\Delta}$, $v \models \varphi$
  $\Rightarrow \varphi \in Con(\Delta)$
- Si $\varphi \in Con(\Delta) \Rightarrow \forall v$ tq $v \models \Delta$, $v \models \varphi \Rightarrow$
  $\forall v$ tq $v \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $v \models \varphi \Rightarrow$
  $\varphi \in Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$
- Por lo tanto $Con(\Delta) = Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$
  q.e.d.

A 2/5

ejercicio 2

Veamos que vale la ida:

$\Rightarrow$) sea $Con(\Gamma)$ m.c que $\exists! v$ tal que $v \models \Gamma$.

Por Absurdo:

- (existencia) sup $\nexists v$ tq $v \models \Gamma$, entonces Γ no es satisfacible ✓. ~~Como $\Gamma \subseteq Con(\Gamma)$ ($\Gamma \models \Gamma$) entonces ...~~

Por compacidad $\exists\ \Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito (¿insatisfacible?) y además como $\Gamma \models \Gamma_0$, $\Gamma_0 \in Con(\Gamma)$ y de nuevo, por compacidad, $Con(\Gamma)$ no puede ser satisfacible¿? y, por lo tanto, no es consistente ✓. Como $Con(\Gamma)$ es m.c esto es absurdo y provino de suponer Γ no sat. ✓

Si Γ no sat. $\Gamma \models \alpha$ $\forall \alpha \in form$

No hacía falta compacidad. Γ insatisfacible y $\Gamma \subseteq Con(\Gamma) \Rightarrow Con(\Gamma)$ insat.

- (unicidad) Sean v_1 y v_2 tq $v_1 \models \Gamma$ y $v_2 \models \Gamma$. ~~...~~ supongamos $v_1 \neq v_2$, entonces $\exists\ p \in Prop$ tq $v_1(p) = 0$ y $v_2(p) = 1$ ✓ (como no hay suposiciones sobre ninguna en especial, esto se asume sin pérdida de generalidad). ✓

Como v_1 y v_2 satisfacen a Γ, por def de $Con(\Gamma)$ ambas satisfacen a $Con(\Gamma)$ ✓ Pero como $Con(\Gamma)$ es m.c, o sucede que $p \in Con(\Gamma)$ o sucede que $\neg p \in Con(\Gamma)$ ✓ y por lo tanto no puede pasar que v_1 y v_2 lo satisfagan simultáneamente ✓. Abs (viene de suponer $v_1 \neq v_2$) ✓

Veamos ahora la vuelta:

$\Leftarrow$) Como $v \models \Gamma$, $v \models Con(\Gamma)$ (por definición de $Con(\Gamma)$)✓. Entonces $Con(\Gamma)$ es sat. ✓ (1)

Sabiendo que v es la única que satisface a Γ, supongamos que $Con(\Gamma)$ no es mc, por lo dicho anteriormente eso pasa sólo si no es maximal (es sat. por (1)) ✓

Entonces existe α tq ni $\alpha \in Con(\Gamma)$ ni $\neg\alpha \notin Con(\Gamma)$ ✓

↳ Usas que Γ consistente y ($\forall \alpha \in Form$) $\alpha \in \Gamma$ ó $\neg\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma$ m.c., que no es trivial.

$\iff \Gamma \not\models \alpha$ ✓ ni $\Gamma \not\models \neg\alpha$ ✓; por lo tanto

($v \models \Gamma$ única) $v \not\models \alpha$ ✓ ni $v \not\models \neg\alpha$ ✓. Absurdo, vino de suponer $Con(\Gamma)$ no maximal. ✓ Sabiendo que es cte por (1), entonces es m.c ✓

$\square$

3/5

<u>ejercicio 3</u>

supongamos que la propiedad es expresable por φ. Defino una secuencia de fórmulas ϕ_i que expresan "existen al menos i elementos que no están en la imagen". Formalmente:

$$\phi_i = (\exists x_1) \dots (\exists x_i) \Big(\text{todosDistintos}(x_1, \dots, x_i) \wedge (\forall y) \big(\bigwedge_{j=1}^{i} f(y) \neq x_j \big) \Big)$$

Sea $\Gamma = \{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \{\varphi\}$

- Veamos que Γ <u>no es satisfacible</u>:

Si lo fuera, existirían $\mathcal{M}, v$ tq $\mathcal{M} \models \Gamma$.

En particular $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ y, por definición de φ, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tq $|\{y \mid (\forall x)\, f_{\mathcal{M}}(x) \neq y\}| = k$.

Es decir, existe un número finito de elementos k que no están en la imagen de $f_{\mathcal{M}}$.

Pero $\mathcal{M} \models \phi_i[v]$ $\forall i \in \mathbb{N}$. En particular, $\mathcal{M} \models \phi_{k+1}[v]$.

- $\mathcal{M} \models \phi_{k+1}[v]$ sii $\mathcal{M} \models \Big((\exists x_1 \dots x_{k+1})\big((\text{todosDist}(x_1 \dots x_{k+1}) \wedge (\forall y)\big(\bigwedge_{j=1}^{k+1} f(y) \neq x_j\big)\big)\Big)$

- sii existen $\{n_1, \dots, n_{k+1}\} \subseteq \mathcal{M}$ tales que

$\mathcal{M} \models (\text{todosDistintos}(x_1 \dots x_{k+1}))[v(x_1 = n_1 \dots x_{k+1} = n_{k+1})]$ y

para todo $m \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \big(\bigwedge_{j=1}^{k+1} f(y) \neq x_j\big)[v(x_1 = n_1, \dots, x_{k+1} = n_{k+1}, y = m)]$

- Sii existen $\{n_1, \dots, n_{k+1}\} \subseteq M$ tales que $n_1, \dots, n_{k+1}$ son todos distintos y además para todo $m \in M$, $\underset{\text{de metalenguaje}}{\bigwedge_{i=1}^{k+1}} f_M(m) \neq_M n_i$

- Sii existen $k+1$ elementos distintos en M que no están en la imagen de f_M. (A)

Lo cual contradice $M \models \varphi[v]$ dado que φ expresa que solamente k elementos cumplían dicha propiedad. Absurdo, vino de suponer $M, v \models \Gamma$, por lo tanto Γ es insatisfacible.

- Veamos que Γ ~~es satisfacible~~:
Esto lo demostramos por compacidad viendo que todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, Γ_0 finito, es sat.
Busquemos entonces M y v tq $M \models \Gamma_0[v]$:
sea $m = \max(\{i \mid \phi_i \in \Gamma_0\} \cup \{1\})$
Considero el modelo $A = \langle \mathbb{N}, f_A, =_A \rangle$
donde $f_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \leq m \\ x & \text{sino} \end{cases}$

Es fácil notar que ~~[illegible]~~ $\mathrm{Im}\, f = \{0\} \cup \{x \mid x > m\}$
Por lo tanto $\{y \mid (\forall x)\, f(x) \neq y\} = \{x \mid 0 < x \leq m\}$
y por lo tanto $\exists\, k \,(= m)$ tal que
$|\{y \mid (\forall x) f(x) \neq y\}| = k$. Entonces $A \not\models \varphi$. (esté o no φ en Γ_0)

4/5

También vale entonces ϕ_m en A (pertenezca a Γ_0 o no), dado que por la semántica de ϕ_m (obtenida de manera generalizada por ⊛ para ϕ_{k+1}) sabemos que existen m elementos que no están en la imagen de f_A (cuando vimos A ⊨ φ).

Por A ⊨ ϕ_m sabemos que vale A ⊨ ϕ_i ($\forall i \leq m$) dado que si existen m elementos que no estén en la imagen, en particular existen al menos i. Por lo tanto A ⊨ ϕ_i ($\forall i \leq m$) y en particular, por cómo tomamos a m, A ⊨ ϕ_i ($\forall i$ tq $\phi_i \in \Gamma_0$).

Con esto finalmente tenemos que A ⊨ φ y A ⊨ ϕ_i ($\forall i$ tq $\phi_i \in \Gamma_0$), por lo tanto A ⊨ Γ_0 ~~[illegible]~~ suceda que $\phi_i \in \Gamma_0$ y $\varphi \in \Gamma_0$ o no. Por lo tanto, como no asumimos nada sobre Γ_0, todo subconjunto finito de Γ es sat

$\Rightarrow$ Γ es sat. Pero vimos que no

Compacidad

lo era, Abs (vino de suponer φ expresable).

~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ φ no es expresable

5/5

ejercicio 4

ⓐ Falso

Como demostramos en el ejercicio 3 de la práctica 7, existe un conjunto de axiomas que extiende a SQ llamado SQ^T que es correcto y completo respecto de la clase de modelos transitivos y además es ~~correcto~~ completa respecto a la clase de todos los modelos.

ⓑ verdadero Sea $C_1 \subseteq C_2$:

~~Por contrarrecíproco:~~ Supongamos $\Gamma_2 \not\subseteq \Gamma_1$ entonces existe $\varphi \in Form(L)$ tal que $C_2 \models \varphi$ (*) pero $C_1 \not\models \varphi$, es decir que existe $\mathcal{M}$ modelo de C_1 tq $\mathcal{M} \not\models \varphi$. Pero como $C_1 \subseteq C_2$, $\mathcal{M} \in C_2$ y por lo tanto, $C_2 \not\models \varphi$ que contradice (*). Absurdo (vino de suponer $\Gamma_2 \not\subseteq \Gamma_1$)